第 4 章　立体几何初步

4.1　空间的几何体

4.1.1　几类简单几何体

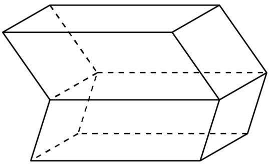
· 易错记 ·

1-1. A　【解析】倾斜后水槽中的水形成的几何体有两个平面平行,侧棱互相平行且相等,由棱柱的定义可知,此几何体是棱柱.

· 题型诀 ·

1-1. D　【解析】由定义知长方体是特殊的平行六面体,A 正确;
正方体是特殊的正四棱柱,B 正确;
平行六面体是特殊的四棱柱,C 正确;
底面是长方形的直四棱柱是长方体,D 错误.
故选 D.

1-2. ABC　【解析】根据棱柱的定义可知棱柱的两个底面平行且全等,故 A 正确;
根据棱柱的定义可知棱柱的两个底面平行且全等,侧棱均平行,故 B 正确;
棱柱底面至少为三角形,故棱柱至少有两个底面和三个侧面,即五个面,故 C 正确;
如图所示,



该几何体满足有两个面互相平行且其余各面都是四边形,但该几何体不是棱柱,故 D 错误.
故选 ABC.

2-1. B　【解析】根据棱锥的结构特征可知,剩余部分是四棱锥 $A'-BCC'B'$.

2-2. D　【解析】对于①,棱柱的侧面不一定全等,故①为假命题;对于②,若三棱锥的三条侧棱两两垂直,则其三个侧面也两两垂直,比如正方体中共点的三个相邻平面,故②为真命题;对于③,棱台的侧面不一定是等腰梯形,故③为假

命题. 故选 D.

3-1. D 【解析】①错误,圆台是直角梯形绕其直角边所在直线或等腰梯形绕其两底边的中点连线旋转形成的;②正确;③错误,球是以半圆的直径所在直线为轴旋转一周形成的旋转体;④正确.

3-2. 【解】(1)轴截面 SAB 的面积为

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times SO=4\sqrt{3}$,

所以 $SO=2$.

所以圆锥 SO 的母线长 $l=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$.

(2)在轴截面 SAB 中,$SO=2$,$SA=4$,

所以 $\angle SAB=\frac{\pi}{6}$,$\angle ASB=\frac{2\pi}{3}$.

设 $\angle BSC=\theta$,则 $0<\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

所以 $\triangle SBC$ 的面积为 $\frac{1}{2}l^2\sin\theta=8\sin\theta$,

所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,截面 SBC 面积有最大值,最大值为 8.

4-1. D 【解析】设正方体的棱长为 a.

$\because$ BC_1 的中点到旋转轴的距离等于 $\frac{1}{2}a$,

而 B,C_1 两点到旋转轴的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$\therefore$ BC_1 的中点旋转一周,得到的圆较小,可知所得旋转体的中间细,上、下粗.

由此可得 A,C 项不符合题意,舍去.

又$\because$ 在所得旋转体的侧面上有无数条直线,且直线与旋转轴不共面,$\therefore$ B 项不符合题意,只有 D 项符合题意. 故选 D.

4-2. 【解】将所得平面图形绕直线 DE 旋转一圈后,所得几何体是上部是圆锥,下部是圆柱挖去一个半球体的组合体.

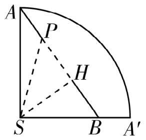
5-1. D 【解析】由题得,蛋巢的底面是边长为 1 的正方形,故经过 4 个顶点截鸡蛋所得的截面圆的直径为 1. 由于鸡蛋(球)的半径为 1,故球心到截面圆的距离为 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,而垂直折起的 4 个小直角三角形的高为 $\frac{1}{2}$,故鸡蛋最高点与蛋巢底面的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}$. 故选 D.

6−1. B 【解析】根据题图①的圆、矩形，得题图①还原后的几何体为圆柱；根据题图②的圆、扇形，得题图②还原后的几何体为圆锥；根据题图③的三角形，得题图③还原后的几何体为棱锥.

6−2. C 【解析】该圆锥的母线长为 $\sqrt{(40\sqrt{15})^2+40^2}=160$，

所以$\frac{2\times\pi\times40}{160}=\frac{\pi}{2}$，则圆锥的侧面展开图是圆心角为$\frac{\pi}{2}$的扇形.



如图是圆锥的侧面展开图，连接 AB，过点 S 作 AB 的垂线，垂足为 H.

由两点之间线段最短，知观光公路最短为图中的 AB，$AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=\sqrt{160^2+120^2}=200$.

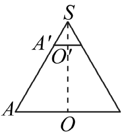
记点 P 为 AB 上任一点，连接 PS，上坡为 AH 段，即 P 到山顶 S 的距离越来越小，下坡为 HB 段，即 P 到山顶 S 的距离越来越大.

由 Rt$\triangle SAB\backsim$Rt$\triangle HSB$，得 $HB=\frac{SB^2}{AB}=\frac{120^2}{200}=72(\mathrm{m})$.

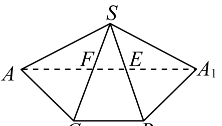
7−1. B 【解析】当截面过轴时，圆锥的轴截面为等腰三角形，此时①符合条件；当截面不过轴时，此时⑤符合条件. 故截面图形可能是①⑤. 故选 B.

7−2. D 【解析】用一个平面去截一个几何体，得到的截面是一个圆面，则这个几何体可能是圆锥，还可能是圆柱，也可能是球体. 故选 D.

8−1. 12 【解析】设圆台的上底面半径为 r，圆锥的母线长为 l，则圆台的下底面的半径为 $4r$，作出圆锥的轴截面如图，则



$\triangle SO'A'\backsim\triangle SOA$，所以$\frac{SA'}{SA}=\frac{O'A'}{OA}$，即$\frac{l-9}{l}=\frac{r}{4r}$，解得 $l=12$. 即圆锥的母线长为 12.



8−2. 6 【解析】沿侧棱 SA 将正

三棱锥侧面展开如图所示，连接 AA_1，则 AA_1 与 SB，SC 的交点分别为 E，F，此时 $\triangle AEF$ 的周长最小．因为 $\angle A_1SB=\angle BSC=\angle CSA=40°$，所以 $\angle ASA_1=120°$．又 $SA=SA_1$，所以 $\angle SAA_1=\angle SA_1A=30°$，所以 $AA_1=2SA\cos\ 30°=2\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$．所以 $\triangle AEF$ 周长的最小值为 6．

4.1.2　空间几何体的直观图

· 易错记 ·

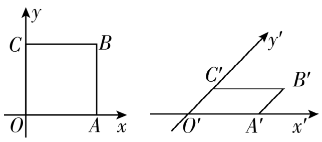
1-1. B　【解析】由题图可知，$AB\perp AC$，$AB=A'B'=1$，$AC=2A'C'=2$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$．故选 B．

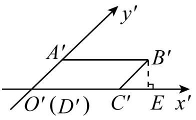
· 题型诀 ·

1-1. B　【解析】如图所示为正方形 $OABC$ 及其直观图 $O'A'B'C'$，显然 $OC=OA$，$O'C'\neq O'A'$，A 错误；$\angle COA=\angle OAB$，$\angle C'O'A'\neq\angle O'A'B'$，C 错误；正方形是特殊的菱形，直观图为四边不相等的平行四边形，D 错误；水平放置的三角形的直观图仍是三角形，B 正确．

故选 B．



1-2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　【解析】作出正方形 $ABCD$ 的直观图$A'B'C'D'$如图所示．因为$O'A'=B'C'=1$，$\angle B'C'x'=45°$，所以顶点 B'到 x'轴的距离为 $1\times\sin\ 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

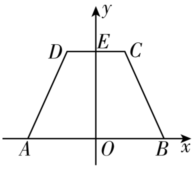


1-3. 【解】(1) 如图①，在等腰梯形 $ABCD$ 中，设 O 为 AB 的中点，E 为 DC 的中点，以 O 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，OE 所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy．建立如图②所示坐标系$x'O'y'$，并使$\angle x'O'y'=45°$．

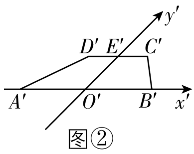
(2) 在坐标系 $x'O'y'$中，以 O'为 $A'B'$的中点，在 x'轴上取 $A'B'=AB$，在 y'轴上取 $O'E'=\frac{1}{2}OE$，过点 E' 作 $D'C'$ 平行于 x'

轴，并使 $D'C'=DC$ 且 E' 为 $D'C'$ 的中点，连接 $A'D'$，$B'C'$.

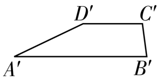
(3)擦去 x'轴和 y'轴得到梯形$A'B'C'D'$. 梯形$A'B'C'D'$就是等腰梯形 $ABCD$ 水平放置的直观图，如图③所示.



图①



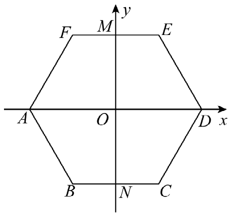
图②



图③

2-1.【解】(1)画底面.

①在正六边形 $ABCDEF$ 中，取 AD 的中点为 O，EF 的中点为 M，BC 的中点为 N，以 AD 所在直线为 x 轴，MN 所在直线为 y 轴，两轴相交于点 O(如图①所示)，画相应的 x' 轴、y' 轴和 z' 轴，三轴交于点 O'，使$\angle x'O'y'=45°$，$\angle x'O'z'=90°$(如图②所示).



图①

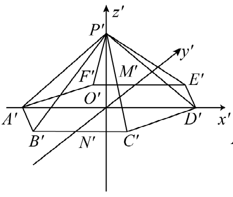
②在图②中，以 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$，在 y' 轴上取 $M'N'=\dfrac{1}{2}MN$，以 N'为中点画 $B'C'$平行于 x'轴，并且等于 BC；再以 M'为中点画 $E'F'$平行于 x'轴，并且等于 EF.

③连接 $A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$得到正六边形 $ABCDEF$ 水平放置的直观图$A'B'C'D'E'F'$.

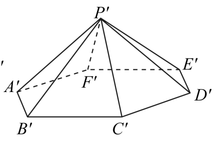
(2)画顶点，在 $O'z'$轴上任意选取一点(不含点 O')为 P'.

(3)成图. 连接 $P'A'$，$P'B'$，$P'C'$，$P'D'$，$P'E'$，$P'F'$，并擦去 x'轴，y'轴，z'轴，加以整理(将被遮挡的线改为虚线)，便得到六棱锥 $P\text{-}ABCDEF$ 的直观图 $P'-$

$A'B'C'D'E'F'$(如图③所示).



图②



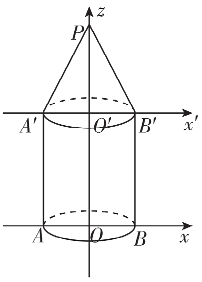
图③

2-2.【解】(1)画轴. 如图①所示,画 x 轴、z 轴,使 $\angle xOz=90°$.

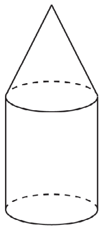
(2)画圆柱的两底面. 以 O 为中点,在 x 轴上取线段 $AB=3$ cm,则 $OA=OB=\frac{3}{2}$ cm. 利用椭圆模板画椭圆,使其经过 A,B 两点,这个椭圆就是圆柱的下底面. 在 Oz 上截取点 O',使 $OO'=4$ cm,过 O' 作 Ox 的平行线 $O'x'$,类似圆柱下底面的作法作出圆柱的上底面.

(3)画圆锥的顶点. 在 Oz 上截取点 P,使 $PO'=3$ cm.

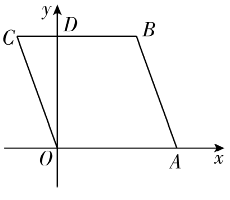
(4)成图. 连接 $A'A,B'B,PA',PB'$,并整理,得到此几何体的直观图. 如图②所示.



图①


图②

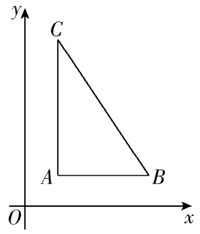
3-1. A 【解析】因为直观图中四边形 $O'A'B'C'$ 为矩形,所以其面积 $S'=O'A'\cdot O'C'=3$,所以原图形中四边形面积 $S=\frac{S'}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=6\sqrt{2}$,由直观图还原原图形,如图.



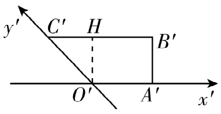
由 $O'C'=1$,$\angle D'O'A'=45°$,可得 $O'D'=\sqrt{2}$,所以 $OD=2\sqrt{2}$,又 $CD=C'D'=1$,所

以 $OC=\sqrt{1+8}=3$，又 $OA/\!/CB$，$OA=CB=OC$，所以四边形 $OABC$ 为菱形. 故选 A.

3-2. D 【解析】根据 $B'C'=C'A'=2$，$\angle C'A'B'=45°$，则 $\angle C'B'A'=45°$，$\angle A'C'B'=90°$，所以 $A'B'=2\sqrt{2}$，如图，由斜二测画法还原图形，$AB=2\sqrt{2}$，$AC=4$，则 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{6}$.



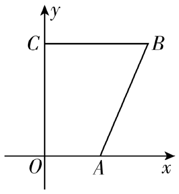
3-3. $8+4\sqrt{2}$ 【解析】如图①，过点 O' 作 $O'H\perp B'C'$ 于点 H，



图①

则 $\triangle O'HC'$ 为等腰直角三角形，因为 $O'C'=2$，所以 $C'H=\sqrt{2}$，$B'C'=\sqrt{2}+2$.

四边形 $OABC$ 为如图②所示的直角梯形，



图②

所以 $OA=O'A'=2$，$OC=4$，$BC=B'C'=\sqrt{2}+2$，$AB=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$，

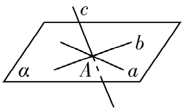
故四边形 $OABC$ 的周长为 $OA+AB+BC+OC=2+3\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+4=8+4\sqrt{2}$.

4.2 平面

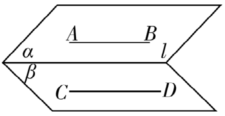
· 题型诀 ·

1-1. C 【解析】结合图形可以得出平面 α，β 相交于直线 m，直线 n 在平面 α 内，直线 m，n 相交于点 A，结合选项可得 C 正确.

1-2. 【解】如图所示，(1) 对应图①，(2) 对应图②.



图①



图②

2–1. D 【解析】对于 A，因为共线的三点可确定无数个平面，故 A 错误；

对于 B，若两个平面有一个公共点，那么就有一条经过该点的公共直线，即交线，该交线上有无数个公共点，故 B 错误；

对于 C，三条平行直线可能共面，也可能有一条在另外两条确定的平面外，故 C 错误；

对于 D，当三条直线两两相交，三个交点不重合时，三条直线共面，当三条直线两两相交于一个点时，这三条直线可能在同一个平面内，也可能不共面，此时其中任意两条直线都可确定一个平面，即可确定三个平面，故 D 正确.

故选 D.

2–2. B 【解析】由基本事实第(1)条，可得①正确.

由题意知 α,β 不重合，根据基本事实第(1)条，可得②正确.

若 $l\not\subset\alpha, A\in l$，则 $A\in\alpha$ 或 $A\notin\alpha$，可得③不正确. 若 $A,B,C\in\alpha, A,B,C\in\beta$，如果 A,B,C 不共线，则 α 与 β 重合；如果 A,B,C 共线，则 α 与 β 可以相交. 由基本事实第(3)条，可得④不正确.

其中正确的个数为 2，故选 B.

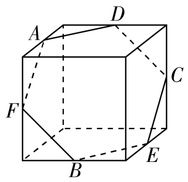
3–1. 【证明】$\because l_1\cap l_2=A$，$\therefore l_1, l_2$ 确定一平面 α. 又 $l_2\cap l_3=B, l_1\cap l_3=C$，$\therefore B\in l_2$，$C\in l_1$，$\therefore B\in\alpha, C\in\alpha$. 又 $B\in l_3, C\in l_3$，$\therefore l_3\subset\alpha$，$\therefore$ 直线 l_1, l_2, l_3 在同一平面内.

4–1. D 【解析】由正方体性质，选项 A，B，C 中，A,B,C,D 四点显然不共面.

对于 D 选项，如图取 E,F 为正方体所在棱的中点，依次连接 $ADCEBF$，

易知 $ADCEBF$ 为平面正六边形，所以 A,B,C,D 四点共面.

故选 D.



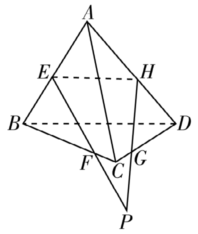
5–1. C 【解析】如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别在边 AB,BC 上，有 $E\in$ 平面 ABC，$F\in$ 平面 ABC，则直线 $EF\subset$ 平面 ABC.

同理，直线 $GH\subset$ 平面 ADC. 因为 EF,GH 能相交于点 P，即 $P\in EF$，$P\in GH$，所以 $P\in$ 平面 ABC，$P\in$ 平面 ADC.

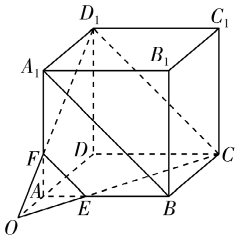
而平面 $ABC\cap$ 平面 $ADC=AC$，于是有 $P\in AC$，A 不正确，C 正确，D 不正确.

又直线 AC 与 BD 没有公共点，即点 P 不在直线 BD 上，B 不正确.

故选 C.



5–2. 【证明】(1) 如图，连接 EF，A_1B，D_1C.



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1F=2FA$，$BE=2AE$，所以 $EF/\!/A_1B$，

又 $BC/\!/A_1D_1$，且 $BC=A_1D_1$，

所以四边形 BCD_1A_1 是平行四边形，所以 $A_1B/\!/D_1C$，

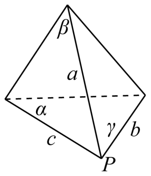
$\therefore EF/\!/D_1C$，所以 E,C,D_1,F 四点共面.

(2) 由 $D_1F\cap CE=O$，$\therefore O\in D_1F$，

又 $D_1F\subset$ 平面 ADD_1A_1，$\therefore O\in$ 平面 ADD_1A_1，

同理 $O\in$ 平面 $ABCD$，又平面 $ADD_1A_1\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$\therefore O\in AD$，即 A,O,D 三点共线.



6-1.【证明】∵ $\alpha\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\beta=a$，∴ $a\subset\gamma$，$b\subset\gamma$. 又直线 a 和 b 不平行，∴ 直线 a 和 b 必相交. 设 $a\cap b=P$，则 $P\in a$，$P\in b$. 又∵ $a\subset\beta$，$b\subset\alpha$，∴ $P\in\alpha$，$P\in\beta$. 又 $\alpha\cap\beta=c$，∴ $P\in c$，即直线 c 经过点 P，∴ a,b,c 三条直线必过同一点.

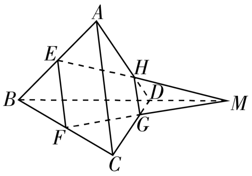
6-2.【证明】如图，因为 $DH=\frac{1}{4}AD$，$DG=\frac{1}{4}CD$，所以 $GH=\frac{1}{4}AC$，且 $GH//AC$.

又 $EF=\frac{1}{2}AC$，且 $EF//AC$，所以 $GH=\frac{1}{2}EF$，且 $GH//EF$，

故 E,F,G,H 四点共面，且直线 EH,FG 必相交于一点.

设 $EH\cap FG=M$，因为 $M\in EH$，$EH\subset$ 平面 ABD，所以 $M\in$ 平面 ABD，同理 $M\in$ 平面 BCD.

而平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，故 $M\in BD$，即直线 EH,FG 必相交于一点，且这个交点在直线 BD 上.



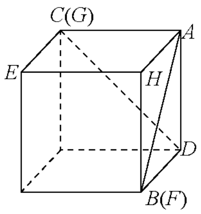
4.3 直线与直线、直线与平面的位置关系

4.3.1 空间中直线与直线的位置关系

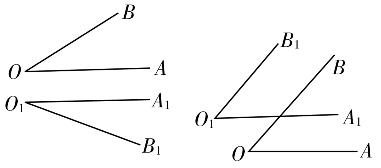
· 题型诀 ·

1-1. C　【解析】因为空间中直线与直线的位置关系分为异面和共面，其中共面又分为相交与平行. 故选 C.

1-2. 异面　【解析】把正方体的展开图还原为正方体，如图所示. 由图可知，直线 AB 与直线 CD 是异面直线.



2-1. D 【解析】如图，



当$\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$，且$OA//O_1A_1$，$OA$与$O_1A_1$的方向相同时，$OB$与$O_1B_1$不一定平行.

故选 D.

2-2. 相等 【解析】$\because G,H$分别为AC，BC的中点，$\therefore GH//AB//DE$. 由三棱台$DEF-ABC$可知$EF//HC$，$\therefore \angle DEF=\angle GHC$.

3-1. C 【解析】如图，延长AB至点D，使$AB=BD$，延长A_1B_1至点E，使$A_1B_1=B_1E$，连接DE，B_1D.

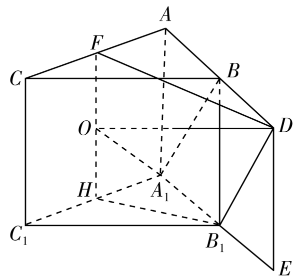
易证$A_1B//B_1D$，则异面直线OB_1与A_1B的夹角即为$\angle OB_1D$或其补角，过点O作$FH\perp AC$，交AC于点F，交A_1C_1于点H，连接DF，B_1H，OD. 在$\triangle A_1B_1H$中，

由余弦定理得，$B_1H=\sqrt{A_1B_1^2+A_1H^2-2A_1B_1\cdot A_1H\cos\angle B_1A_1H}=\sqrt{3}$，同理，在$\triangle ADF$中，

$DF=\sqrt{AF^2+AD^2-2AF\cdot AD\cos\angle DAF}=\sqrt{7}$，所以在 Rt$\triangle OHB_1$中，$OB_1^2=OH^2+B_1H^2$，则$OB_1=2$，同理可求得$OD=2\sqrt{2}$，

$B_1D=\sqrt{5}$，所以在$\triangle OB_1D$中，

$\cos\angle OB_1D=\dfrac{2^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{20}$.



3-2. D 【解析】如图，取CD的中点P，连接PM，PN.

因为 M,N 分别为 BC,AD 的中点,

所以 $PM//BD$ 且 $PM=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$,

$PN//AC$ 且 $PN=\frac{1}{2}AC=1$,

则 $\angle MPN$ 或其补角即为异面直线 AC 与 BD 所成的角.

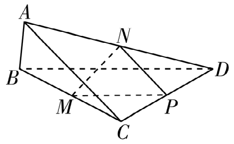
因为 $PN^2+MN^2=PM^2$,

所以 $\angle PNM=\frac{\pi}{2}$,

所以 $\angle PMN=\angle MPN=\frac{\pi}{4}$,

即异面直线 AC 与 BD 所成的角是 $\frac{\pi}{4}$.

故选 D.



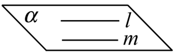
4.3.2 空间中直线与平面的位置关系

课时 1 直线与平面平行的判定及性质

·题型诀·

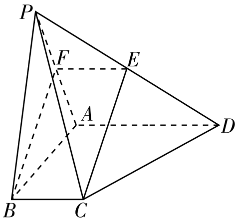
1–1. B 【解析】由题意,直线 l 是平面 α 的斜线,由斜线的定义可知与平面相交但不垂直的直线是平面的斜线,所以在平面 α 内肯定不存在与直线 l 平行的直线. 故选 B.

1–2. C 【解析】①正确;②错误,如图



所示,$l//m$,而 $m\subset\alpha$,$l\subset\alpha$;③正确;④错误,另一条直线还可能与平面相交. 由此可知,①③正确,故选 C.

2–1. 【证明】如图,取 F 为棱 PA 的中点,连接 EF,BF,因为 E 为棱 PD 的中点,所以 $EF//AD$,且 $EF=\frac{1}{2}AD$,



又因为 $AD//BC$,且 $AD=2BC$,

所以 $EF//BC$,$EF=BC$,

则四边形 $EFBC$ 是平行四边形，

所以 $CE//BF$，

又因为 $CE\not\subset$ 平面 PAB，$BF\subset$ 平面 PAB，

所以 $CE//$平面 PAB.

2-2.【证明】(1)$\because$ M,N 分别是 A_1B 和 A_1C 的中点，$\therefore$ $MN//BC$.

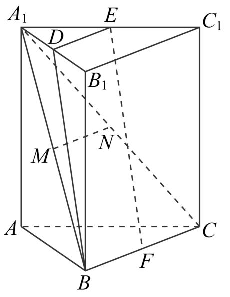
又 $BC\subset$平面 ABC，$MN\not\subset$平面 ABC，

$\therefore$ $MN//$平面 ABC.

(2)如图，取 A_1B_1 的中点 D，连接 DE，BD.

$\because$ D 为 A_1B_1 的中点，E 为 A_1C_1 的中点，

$\therefore$ $DE//B_1C_1$，$DE=\dfrac{1}{2}B_1C_1$.



$\because$ 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 是平行四边形，

$\therefore$ $BC//B_1C_1$ 且 $BC=B_1C_1$.

$\because$ F 是 BC 的中点，

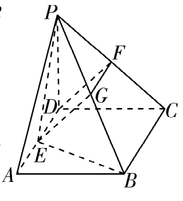
$\therefore$ $BF//B_1C_1$ 且 $BF=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，

$\therefore$ $DE//BF$ 且 $DE=BF$，$\therefore$ 四边形 $DEFB$ 是平行四边形，$\therefore$ $EF//BD$.

又 $BD\subset$ 平面 AA_1B_1B，$EF\not\subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore$ $EF//$平面 AA_1B_1B.

3-1.【证明】(1)取 PB 的中点 G，连接 FG，EG，如图所示.



因为点 G，F 分别为 PB，PC 的中点，

所以 $FG//BC$，$FG=\dfrac{1}{2}BC$.

因为四边形 $ABCD$ 为长方形，所以 $BC//AD$，且 $BC=AD$. 又 E 为 AD 的中点，

所以 $DE//FG$，$DE=FG$，

所以四边形 $DEGF$ 为平行四边形，

所以 $DF//GE$.

因为 $DF\not\subset$平面 PBE，$GE\subset$平面 PBE，

所以 $DF//$平面 PBE.

(2)由(1)知 $DF//$平面 PBE，又 $DF\subset$平面 PDC，平面 $PDC\cap$平面 $PBE=l$，所以

$DF/\!/l$.

课时 2 直线与平面垂直的判定及性质

·题型诀·

1-1. CD 【解析】根据线面垂直的判定定理可知当平面 α 内有两条相交直线都与 l 垂直时，直线 l 与平面 α 垂直. 故选 CD.

1-2. A 【解析】对于 A，依题意 $AA'\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $AA'\perp BC$，又 AB 是底面圆的直径，所以 $BC\perp AC$，$AA'\cap AC=A$，AA'，$AC\subset$ 平面 $AA'C$，所以 $BC\perp$ 平面 $AA'C$，故 A 正确；

对于 B，显然 BC 与 AB 不垂直，则 BC 不可能垂直于平面 $A'AB$，故 B 错误；

对于 C，显然 AC 与 $A'C$ 不垂直，则 AC 不可能垂直于平面 $A'BC$，故 C 错误；

对于 D，显然 AC 与 AB 不垂直，则 AC 不可能垂直于平面 $A'AB$，故 D 错误.

故选 A.

1-3.【证明】(1) 取 AB 的中点 G，连接 CG，FG，如图，

又因为 F 是 EB 的中点，所以 $FG/\!/EA$，$FG=\dfrac{1}{2}EA$.

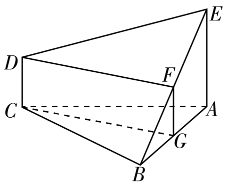
因为 EA 和 DC 都垂直于平面 ABC，所以 $EA/\!/DC$.

又因为 $EA=2DC$，所以 $FG/\!/DC$，$FG=DC$，

所以四边形 $CDFG$ 为平行四边形，从而 $DF/\!/CG$，

又因为 $DF\not\subset$ 平面 ABC，$CG\subset$ 平面 ABC，

所以 $DF/\!/$平面 ABC.



(2) 因为 $EA\perp$ 平面 ABC，$CG\subset$ 平面 ABC，所以 $CG\perp EA$，

因为 $AC=BC$，$AG=BG$，所以 $CG\perp AB$，

又因为 $EA\cap AB=A$，EA，$AB\subset$ 平面 EAB，

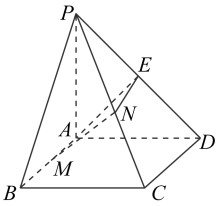
所以 $CG\perp$ 平面 EAB，

由 (1) 可知 $DF/\!/CG$，所以 $DF\perp$ 平面 EAB.

2-1.【证明】(1) 如图所示，取 PD 的中

点 E，连接 AE，NE.

因为 N 为 PC 的中点，E 为 PD 的中点，所以 $NE/\!/CD$，且 $NE=\frac{1}{2}CD$. 因为 $AM/\!/CD$，且 $AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $NE/\!/AM$ 且 $NE=AM$，所以四边形 $AMNE$ 为平行四边形，所以 $MN/\!/AE$. 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD\perp CD$. 又 $AD\cap PA=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AE$. 又 $AE/\!/MN$，所以 $MN\perp CD$.



(2) 由 (1) 可知 $CD\perp AE$，$MN/\!/AE$. 因为 $\angle PDA=45°$，所以 $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，

又 E 为 PD 的中点，所以 $AE\perp PD$. 又因为 $PD\cap CD=D$，所以 $AE\perp$ 平面 PCD. 又 $AE/\!/MN$，所以 $MN\perp$ 平面 PCD.

3-1. D 【解析】如图，过点 A 作 $AH\perp$ 平面 BOC 于点 H，连接 OH，则 $\angle AOH$ 为直线 OA 与平面 OBC 所成的角 θ.

分别作 $HE\perp OB$ 交 OB 于点 E，$HF\perp OC$ 交 OC 于点 F，

连接 AE，AF.

因为 $OB\subset$ 平面 BOC，所以 $AH\perp OB$，

又因为 $AH\cap HE=H$，AH，$HE\subset$ 平面 AEH，所以 $OB\perp$ 平面 AEH，而 $AE\subset$ 平面 AEH，所以 $AE\perp OB$，同理 $AF\perp OC$.

因为 $\angle AOB=\angle AOC=60°$，$\angle OEA=\angle OFA$，$OA=OA$，

所以 $\triangle OEA\cong\triangle OFA$，所以 $AE=AF$，$OE=OF$. 所以 $EH=FH$，则 OH 为 $\angle BOC$ 的平分线，

由 $\angle BOC=60°$，可得 $\angle FOH=30°$.

令 $HF=a$，则 $OH=2a$，$OF=\sqrt{3}a$，即 $OE=OF=\sqrt{3}a$，

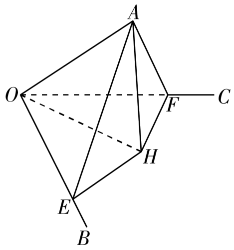
在直角三角形 AOE 中，因为 $\angle AOB=60°$，

所以 $AO=\frac{\sqrt{3}a}{\cos 60°}=2\sqrt{3}a$，

故在直角三角形 AOH 中，$\cos\angle AOH=$

$\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{2a}{2\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

即 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.



3-2. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ 【解析】连接 EB_1, C_1H, 则平面 EFH 即为平面 EHC_1B_1,

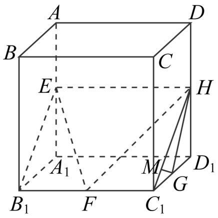
过点 G 作 $GM\perp C_1H$ 交 C_1H 于 M. 因为 $B_1C_1\perp$ 平面 C_1D_1DC, 所以 $B_1C_1\perp MG$, 又 $B_1C_1\cap C_1H=C_1$,

所以 $MG\perp$ 平面 EFH,

所以 $\angle GHC_1$ 即为 GH 与平面 EFH 所成的角.

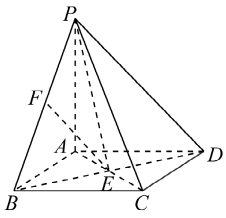
设正方体的棱长为 2, 则 $C_1G=1$, $GH=\sqrt{2}$, $C_1H=\sqrt{5}$,

所以 $\cos\angle GHC_1=\dfrac{GH^2+C_1H^2-C_1G^2}{2GH\cdot C_1H}=\dfrac{2+5-1}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.



3-3. (1)【证明】如图, 连接 BD, 则 E 是 BD 的中点.

又 F 是 PB 的中点, 所以 $EF/\!/PD$,



又因为 $EF\not\subset$ 平面 PCD, $PD\subset$ 平面 PCD,

所以 $EF/\!/$平面 PCD.

(2)【解】如图, 连接 PE, 因为在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB\perp AD$, 且 $AB=AD$, 所以平行四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $BD\perp AC$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA\perp BD$.

又因为 $AC\cap PA=A$, 所以 $BD\perp$ 平面 PAC, 故 $\angle EPD$(或其补角)是 PD 与平面 PAC 所成的角.

又因为 $EF//PD$，所以 EF 与平面 PAC 所成的角为 $\angle EPD$(或其补角).

因为 $PA=AB=AD$，$\angle PAD=\angle BAD=90°$，

所以 $Rt\triangle PAD\cong Rt\triangle BAD$，所以 $PD=BD$.

在 $Rt\triangle PED$ 中，$\sin\angle EPD=\dfrac{ED}{PD}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\angle EPD=30°$，

所以 EF 与平面 PAC 所成角的大小是 $30°$.

4-1.【解】(1) $AD_1\perp$ 平面 A_1B_1CD.

证明如下：

因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1B_1\perp AD_1$，

$AD_1\perp A_1D$，$A_1D\cap A_1B_1=A_1$，A_1D，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1CD，

所以 $AD_1\perp$ 平面 A_1B_1CD.

(2)连接 B_1O(图略). 因为 $AD_1\perp$ 平面 A_1B_1CD 于点 O，

所以直线 B_1O 是直线 AB_1 在平面 A_1B_1CD 上的投影.

所以 $\angle AB_1O$ 为直线 AB_1 与平面 A_1B_1CD 所成的角.

又因为 $AB_1=2AO$，所以 $\sin\angle AB_1O=\dfrac{AO}{AB_1}=\dfrac{1}{2}$.

所以 $\angle AB_1O=30°$.

所以直线 AB_1 与平面 A_1B_1CD 所成的角为 $30°$.

4-2. (1)【证明】取棱 BC 上靠近 B 的三等分点 M_1，连接 MM_1，B_1M_1，如图，

又 M 为棱 AC 上靠近 A 的三等分点，N 为棱 A_1B_1 上靠近 A_1 的三等分点，

所以 $MM_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{2}{3}AB$，$NB_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{2}{3}AB$，

所以 $MM_1//NB_1$，且 $MM_1=NB_1$.

所以四边形 MM_1B_1N 是平行四边形，所以 $MN//M_1B_1$.

又 $NM\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，$M_1B_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $MN//$平面 BB_1C_1C.

(2)【解】由直三棱柱的性质及 $\angle ABC=90°$，可知 $B_1N\perp$ 侧面 BB_1C_1C，

又 $C_1D\subset$ 侧面 BB_1C_1C，所以 $B_1N\perp C_1D$.

由 $C_1D\perp$ 平面 B_1MN 知 $B_1M_1\perp C_1D$，所以 $\angle BB_1M_1+\angle B_1DC_1=90°$.

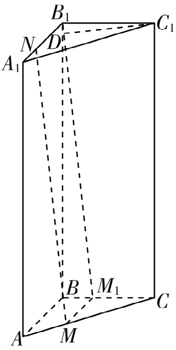
又 $\angle B_1C_1D+\angle B_1DC_1=90°$，

所以 $\angle B_1C_1D=\angle BB_1M_1$.

又 $\tan\angle BB_1M_1=\dfrac{BM_1}{BB_1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{3}=\dfrac{1}{9}$,

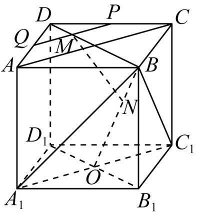
所以 $\tan\angle B_1C_1D=\dfrac{B_1D}{B_1C_1}=\dfrac{B_1D}{1}=\dfrac{1}{9}$,

所以 $B_1D=\dfrac{1}{9}$,即 BB_1 上存在点 D 使得 $C_1D\perp$ 平面 B_1MN.



5-1. C 【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,连接 AC,OB,

连接 B_1D_1 交 A_1C_1 于点 O,连接 BD 交 PQ 于点 M,过点 M 作 $MN\perp OB$ 于点 N,



因为 P,Q 分别为 CD 和 AD 的中点,所以 $PQ/\!/AC$,

又在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1/\!/BB_1/\!/CC_1$ 且 $AA_1=BB_1=CC_1$,

所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形,从而可得 $A_1C_1/\!/AC$,

所以 $A_1C_1/\!/PQ$,又因为 $A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1B,$PQ\not\subset$ 平面 A_1C_1B,

所以 $PQ/\!/$ 平面 A_1C_1B,所以 PQ 到平面 A_1C_1B 的距离即为点 M 到平面 A_1C_1B 的距离,

由正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 可得 $A_1C_1\perp B_1D_1$,

又由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,可得 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,又 $A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

所以 $BB_1\perp A_1C_1$,又 $B_1D_1\cap B_1B=B_1$,B_1D_1,$B_1B\subset$ 平面 D_1B_1BD,

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 D_1B_1BD,又 $MN\subset$ 平面 D_1B_1BD,所以 $A_1C_1\perp MN$,又 $MN\perp OB$,$OB\cap A_1C_1=O$,OB,$A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1B,所

以 $MN\perp$ 平面 A_1C_1B，所以 MN 为点 M 到平面 A_1C_1B 的距离，在 $\mathrm{Rt}\triangle OB_1B$ 中，可得 $\cos\angle OBB_1=\frac{BB_1}{OB}=\frac{1}{\sqrt{BB_1^2+OB_1^2}}=$

$$\frac{1}{\sqrt{BB_1^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2+A_1D_1^2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

所以 $\sin\angle DBO=\sin(90°-\angle OBB_1)=$

$\cos\angle OBB_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

又易求得 $MB=\frac{3}{4}BD=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，所以 $MN=$

$BM\times\sin\angle DBO=\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.4 平面与平面的位置关系

4.4.1 平面与平面平行

·易错记·

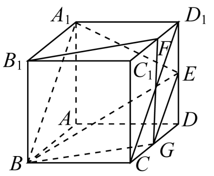
1-1.【解】在棱 C_1D_1 上存在点 F，使 B_1F//平面 A_1BE，F 为 C_1D_1 的中点.

证明如下：如图所示，分别取 C_1D_1 和 CD 的中点 F,G，连接 B_1F,EG,CD_1,FG,BG.

因为 $A_1D_1/\!/B_1C_1/\!/BC$，且 $A_1D_1=BC$，

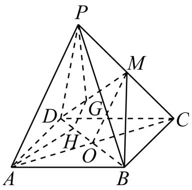
所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形，因此 $D_1C/\!/A_1B$. 又 E,G 分别为 D_1D,CD 的中点，所以 $EG/\!/D_1C$，从而 $EG/\!/A_1B$. 这说明 A_1,B,G,E 四点共面，

所以 $BG\subset$ 平面 A_1BE.



因为四边形 C_1CDD_1 与四边形 B_1BCC_1 都是正方形，F,G 分别为 C_1D_1 和 CD 的中点，所以 $FG/\!/C_1C/\!/B_1B$，且 $FG=C_1C=B_1B$. 因此四边形 B_1BGF 是平行四边形，所以 $B_1F/\!/BG$. 而 $B_1F\not\subset$ 平面 A_1BE，$BG\subset$ 平面 A_1BE，故 B_1F//平面 A_1BE.

2-1.【证明】如图，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 MO，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore O$ 为 AC 的中点.

又 M 是 PC 的中点，

$\therefore MO // AP$.

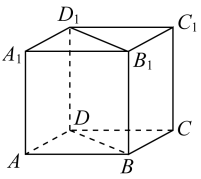
又 $MO \subset$ 平面 BDM，$PA \not\subset$ 平面 BDM，

$\therefore AP //$ 平面 BDM，

又经过 PA 与点 G 的平面交平面 BDM 于 GH，$\therefore AP // GH$.

· 题型诀 ·

1-1. ①② 【解析】



两个平面有无数个公共点，这两个平面不一定重合，还可能相交；若 l,m 是异面直线，$l//\alpha$，$m//\beta$，可能 $\alpha//\beta$，还可能相交. 如图，可借助正方体作为模型验证. 直线 AA_1 与 C_1D_1 异面，$AA_1 //$ 平面 BDD_1B_1，$C_1D_1 //$ 平面 $ABCD$，但平面 BDD_1B_1 与平面 $ABCD$ 相交.

2-1. ABC 【解析】对于 A 选项，$\because AA_1 // BB_1$ 且 $AA_1 = BB_1$，E, H 分别为 AA_1, BB_1 的中点，

$\therefore A_1E // B_1H$ 且 $A_1E = B_1H$，$\therefore$ 四边形 A_1B_1HE 为平行四边形，则 $A_1B_1 // EH$.

$\because F, G$ 分别为 A_1C_1, B_1C_1 的中点，

$\therefore FG // A_1B_1$. $\therefore FG // EH$，故 E, F, G, H 四点共面，故 A 正确.

对于 B 选项，连接 AC_1, BC_1，如图.

$\because E, F$ 分别为 AA_1, A_1C_1 的中点，

$\therefore EF // AC_1$.

$\because EF \not\subset$ 平面 ABC_1，$AC_1 \subset$ 平面 ABC_1，

$\therefore EF //$ 平面 ABC_1.

$\because$ 四边形 AA_1B_1B 为平行四边形，

$\therefore A_1B_1 // AB$，$\because EH // A_1B_1$，$\therefore EH // AB$.

$\because EH \not\subset$ 平面 ABC_1，$AB \subset$ 平面 ABC_1，

$\therefore EH //$ 平面 ABC_1.

$\because EF \cap EH = E$，$\therefore$ 平面 $EGH //$ 平面 ABC_1，故 B 正确.

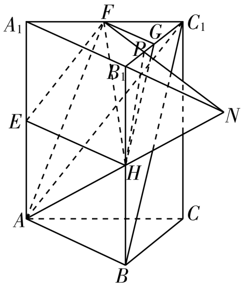
对于 C 选项，由图可知 FH 不与 AA_1 相交. 若 $FH // AA_1$，又 $BB_1 // AA_1$，则 $FH // BB_1$，这与 $FH \cap BB_1 = H$ 矛盾，故 FH 与 AA_1 异面，故 C 正确.

对于 D 选项，延长 AH, A_1B_1 交于点 N，连接 FN 交 B_1C_1 于点 P，连接 PH，则平面 AFH 即平面 AFN.

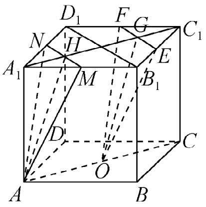
若 $BC //$ 平面 AFH，又 $BC \subset$ 平面 BB_1C_1C，平面 $BB_1C_1C \cap$ 平面 $AFH = PH$，则

$PH//BC$.

事实上,PH 与 BC 相交,故假设不成立,故 D 错误. 故选 ABC.



2-2.【证明】如图,连接 A_1C_1 交 EF 于点 G,交 MN 于点 H,连接 AC,显然 O 为 AC 的中点.



在平面 A_1ACC_1 中,

$\because A_1C_1//AC$,$\therefore GH//AO$.

$\because M,N,E,F$ 分别是 $A_1B_1,A_1D_1,B_1C_1,C_1D_1$ 的中点,$\therefore GH=\dfrac{1}{2}A_1C_1$.

又 $AO=\dfrac{1}{2}AC,A_1C_1=AC$,$\therefore GH=AO$.

连接 AH,OG,则四边形 $AOGH$ 是平行四边形. $\therefore AH//OG$.

连接 B_1D_1,则 $MN//B_1D_1,EF//B_1D_1$,

$\therefore MN//EF$.

又 $MN,AH\subset$平面 AMN,且 $MN\cap AH=H$,

$EF,OG\subset$平面 OEF,且 $EF\cap OG=G$,

$\therefore$ 平面 $AMN//$平面 OEF.

3-1. AB 【解析】对于 A,因为平面 $\alpha//$平面 $\beta,CD\subset\beta$,所以 $CD//\alpha$,故 A 正确;

对于 B,设由 PC 与 PD 所确定的平面为 γ,因为平面 $\alpha//$平面 β,平面 $\alpha\cap$平面 $\gamma=AB$,平面 $\beta\cap$平面 $\gamma=CD$,所以 $AB//CD$,所以$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{AB}{CD}$,即$\dfrac{2}{2+AC}=\dfrac{1}{3}$,解得 $AC=4$,故 B 正确;

对于 C,若 $PB=1$,则 $PB+AB=PA$,这与三角形三边关系定理相矛盾,故 C 错误;

对于 D,若$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AB}{CD}$,则$\dfrac{PA}{AB}=\dfrac{PB}{CD}$,而由 $AB//CD\Rightarrow\dfrac{PA}{AB}=\dfrac{PC}{CD}$,但 PB 与 PC 长度关系不

确定，故 D 错误. 故选 AB.

3-2. D 【解析】$\because$ 平面 BCC_1B_1 // 平面 ADD_1A_1，平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $D_1EBF = BF$，平面 $ADD_1A_1 \cap$ 平面 $D_1EBF = D_1E$，

$\therefore D_1E // BF$. 同理可得 $BE // D_1F$，

$\therefore$ 四边形 D_1EBF 为平行四边形.

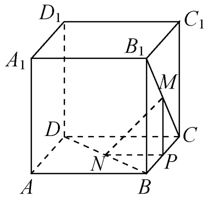
当 E,F 分别为 AA_1, CC_1 的中点时，$D_1E = D_1F$，此时四边形 D_1EBF 为菱形；

当 E,F 分别与 A,C_1 重合时，$D_1E \perp D_1F$，此时四边形 D_1EBF 为矩形，但不是正方形；

其他情况下，四边形 D_1EBF 为普通的平行四边形.

综上所述，四边形 D_1EBF 一定为平行四边形. 故选 D.

3-3. 【证明】如图，作 $MP // BB_1$ 交 BC 于点 P，连接 NP.



$\because MP // BB_1$，$\therefore \dfrac{CM}{MB_1} = \dfrac{CP}{PB}$.

$\because BD = B_1C$，$DN = CM$，

$\therefore B_1M = BN$，

$\therefore \dfrac{CM}{MB_1} = \dfrac{DN}{NB}$. $\therefore \dfrac{CP}{PB} = \dfrac{DN}{NB}$，

$\therefore NP // CD // AB$.

$\because NP \not\subset$ 平面 AA_1B_1B，$AB \subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore NP //$ 平面 AA_1B_1B.

$\because MP // BB_1$，$MP \not\subset$ 平面 AA_1B_1B，$BB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore MP //$ 平面 AA_1B_1B.

$\because MP \subset$ 平面 MNP，$NP \subset$ 平面 MNP，$MP \cap NP = P$，$\therefore$ 平面 $MNP //$ 平面 AA_1B_1B.

又 $\because MN \subset$ 平面 MNP，

$\therefore MN //$ 平面 AA_1B_1B.

4-1. AD 【解析】A 正确；B 不正确，过一点有无数条直线与已知直线垂直；C 不正确，过平面外一点有无数条直线与该平面平行；D 正确. 故选 AD.

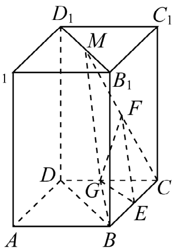
5-1. (1)【证明】如图所示，连接 BM.

$\because BE = EC$，$CF = FM$，$\therefore EF // BM$.

又 $EF \not\subset$ 平面 BDD_1B_1，

$BM \subset$ 平面 BDD_1B_1，

$\therefore EF //$ 平面 BDD_1B_1.



(2)【解】在棱 CD 上存在一点 G,使得平面 $GEF//$平面 BDD_1B_1,此时 G 为 CD 的中点.

如图,取 CD 的中点 G,连接 GE,FG.

$\because$ E 是 BC 的中点,

$\therefore$ $EG//BD$.

又 $\because$ $EG\not\subset$ 平面 BDD_1B_1,$BD\subset$ 平面 BDD_1B_1,

$\therefore$ $EG//$平面 BDD_1B_1.

由(1)知 $EF//$平面 BDD_1B_1,

$\because$ EG,$EF\subset$平面 GEF,$EG\cap EF=E$,

$\therefore$ 平面 $GEF//$平面 BDD_1B_1,

$\therefore$ 在棱 CD 上存在一点 G,使得平面 $GEF//$平面 BDD_1B_1,且$\dfrac{CG}{GD}=1$.

4.4.2 平面与平面垂直

· 易错记 ·

1-1. A 【解析】对于 A,取 AC 的中点 O,连接 OB,OP,如图,因为 $\angle ABC=90°$,所以 $OA=OB=OC$,

因为 $PA=PC$,所以 $PO\perp AC$,所以 $PO^2+AO^2=PA^2$.

又因为 $PA=PB=PC$,所以 $PO^2+BO^2=PB^2$,所以 $PO\perp OB$,

又因为 $AC\cap OB=O$,AC,$OB\subset$平面 ABC,所以 $PO\perp$平面 ABC,

又因为 $PO\subset$平面 PAC,所以平面 $PAC\perp$平面 ABC,所以 A 正确.

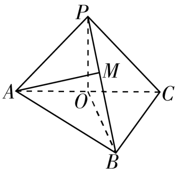
对于 C,假设 $PB\perp$平面 ABC,则由 $PO\perp$平面 ABC,可得过平面 ABC 外一点 P 有两条直线与平面 ABC 垂直,这与过平面外一点只有一条直线与此平面垂直相矛盾,所以 C 错误.

对于 D,假设 $BC\perp$平面 PAB,因为 $PB\subset$平面 PAB,所以 $PB\perp BC$,所以 $\angle PBC=90°$,因为 $PB=PC$,所以 $\angle PBC=\angle PCB=90°$,所以 $\triangle PBC$ 的内角和大于 $180°$,这与三角形内角和定理相矛盾,所以

以 D 错误.

对于 B,假设平面 $PAB\perp$ 平面 PBC,过 A 作 $AM\perp PB$ 于 M,如图,又因为平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$,$AM\subset$ 平面 PAB,所以 $AM\perp$ 平面 PBC,又因为 $BC\subset$ 平面 PBC,所以 $AM\perp BC$,又因为 $AB\perp BC$,$AM\cap AB=A$,$AM,AB\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp$ 平面 PAB,选项 D 中已证实不可能成立,所以平面 PAB 与平面 PBC 不垂直,所以 B 错误.

故选 A.



1-2.【证明】由已知可得 $AE=3$,$BF=4$,$EF=5$,

则折叠后 $EG=3$,$GF=4$,$EF=5$,

所以 $EG\perp GF$.

在梯形 $ABCD$ 中,$CF\perp AB$,则折叠后 $CF\perp EF$,$CF\perp FG$. 又 $EF\cap FG=F$,EF,$FG\subset$ 平面 EFG,所以 $CF\perp$ 平面 EFG,所以 $CF\perp EG$.

又 $GF\cap CF=F$,GF,$CF\subset$ 平面 CFG,

所以 $EG\perp$ 平面 CFG.

又 $EG\subset$ 平面 DEG,所以平面 $DEG\perp$ 平面 CFG.

2-1. C 【解析】在 A 中,若 $m/\!/\alpha$,$m/\!/\beta$,则 α 与 β 相交或平行,故 A 错误;

在 B 中,若 $m\perp\alpha$,$m\perp n$,则 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$,故 B 错误;

在 C 中,若 $m\perp\alpha$,$m/\!/n$,则由线面垂直的性质得 $n\perp\alpha$,故 C 正确;

在 D 中,若 $\alpha\perp\beta$,$m\perp\alpha$,则 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$,故 D 错误.

故选 C.

· 题型诀 ·

1-1. B 【解析】由题意知,$BD\perp$ 平面 ADC,故 $BD\perp AC$,①正确;AD 为等腰直角三角形 ABC 斜边 BC 上的高,平面 $ABD\perp$ 平面 ACD,所以 $AB=AC=BC$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,②正确;易知 $DA=DB=DC$,又由②知,③正确;由①知,④错误. 故选 B.

1-2.【证明】如图，连接 BD. 由题可得 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

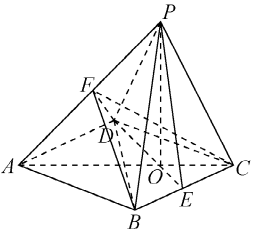
所以 $BC\perp PO$.

依题意得 $\triangle BCD$ 是等边三角形，E 为 BC 的中点，所以 $BC\perp DE$.

又 $PO\cap DE=O$，PO，$DE\subset$ 平面 PED，

所以 $BC\perp$ 平面 PED.

又 $BC\subset$ 平面 BCF，所以平面 $PED\perp$ 平面 BCF.



2-1.（1）【证明】因为 $PA\perp$ 平面 ABC，AB，AC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$，$PA\perp BC$，所以 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PAC$ 为直角三角形.

过点 A 作 $AG\perp PB$，垂足为 G，如图，

因为平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，且 $AG\subset$ 平面 PAB，

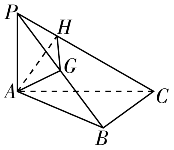
所以 $AG\perp$ 平面 PBC.

又因为 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AG\perp BC$.

又 $AG\cap PA=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，

所以 $BC\perp PB$，$BC\perp AB$，即 $\triangle PBC$ 和 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

所以四面体 $PABC$ 为“鳖臑”.



（2）【解】过点 G 作 $GH\perp PC$，垂足为 H，连接 AH，

由（1）知 $AG\perp$ 平面 PBC，所以 $AG\perp PC$，

而 $GH\perp PC$，$AG\cap GH=G$，

所以 $PC\perp$ 平面 AGH，所以 $PC\perp AH$，

所以 $\angle AHG$ 为二面角 $A-PC-B$ 的平面角，即 $\angle AHG=\dfrac{\pi}{3}$.

因为 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$，设 $AB=BC=x$，$x>0$，

所以 $AG=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$，$AH=\dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4}}$，

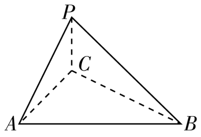
在 $\mathrm{Rt}\triangle AGH$ 中 $\sin\angle AHG=\dfrac{AG}{AH}=$

$$\frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}}{\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即$\frac{\sqrt{2x^2+4}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $x=2$,

所以 AB 的长度为 2.

3-1. $\frac{\pi}{6}$　【解析】由题可得 $AC^2+AB^2=BC^2$,即 $AC\perp AB$,如图所示.



$\because PC\perp$平面 ABC,$AB\subset$平面 ABC,

$\therefore PC\perp AB$,

又 $AC\perp AB$,$PC\cap AC=C$,PC,$AC\subset$平面 PAC,

$\therefore AB\perp$平面 PAC,

又 $PA\subset$平面 PAC,$\therefore AB\perp PA$,

即$\angle PAC$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角.

$\because PC\perp$平面 ABC,$AC\subset$平面 ABC,

$\therefore PC\perp AC$.

在 $Rt\triangle PCA$ 中,$\tan\angle PAC=\frac{PC}{CA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\because \angle PAC\in[0,\pi]$,$\therefore \angle PAC=\frac{\pi}{6}$,

故二面角 $P-AB-C$ 的大小为$\frac{\pi}{6}$.

3-2. (1)【证明】因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,

所以 $AB//C_1D_1$,且 $AB=C_1D_1$,

所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形.

所以 $BC_1//AD_1$.

又因为 $BC_1\not\subset$平面 AB_1D_1,$AD_1\subset$平面 AB_1D_1,

所以 $BC_1//$平面 AB_1D_1.

(2)【解】取 BC_1,AD_1 中点分别为 P,Q,连接 B_1Q,PQ,如图所示,则$\angle B_1QP$ 为二面角 B_1-AD_1-B 的平面角,

理由如下:

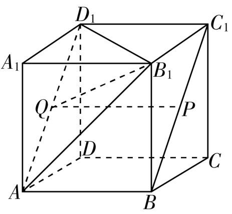
设正方体的棱长为 a,则 $AB_1=B_1D_1=\sqrt{2}a$,所以 $B_1Q\perp AD_1$.

因为 P,Q 分别为 BC_1,AD_1 的中点,

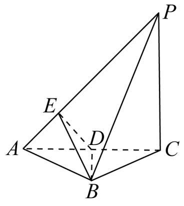
所以 $PQ//AB$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB\perp$平面

AA_1D_1D，$AD_1 \subset$ 平面 AA_1D_1D，所以 $AB \perp AD_1$，所以 $PQ \perp AD_1$.
所以 $\angle B_1QP$ 为二面角 B_1-AD_1-B 的平面角.



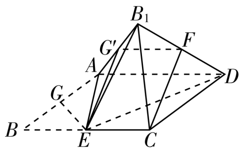
3-3.【解】(1) 因为 $PC \perp$ 平面 ABC，所以 $PC \perp AB$.
又 $AB \perp BC$，$PC \cap BC = C$，
所以 $AB \perp$ 平面 PBC. 所以 PA 在平面 PBC 上的投影为 PB，则 $\angle APB$ 为直线 PA 与平面 PBC 所成的角.
由 $PC \perp$ 平面 ABC 得 $PC \perp BC$.
因为 $BC = 2$，$PC = 2\sqrt{2}$，所以 $PB = 2\sqrt{3}$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABP$ 中，$\tan\angle APB = \dfrac{AB}{PB} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle APB = 30°$.
所以直线 PA 与平面 PBC 所成角的大小为 $30°$.
(2) 如图，取 AC 的中点 D，连接 BD. 因为 $AB = BC$，所以 $BD \perp AC$. 因为 $PC \perp$ 平面 ABC，所以 $PC \perp BD$. 又 $PC \cap AC = C$，所以 $BD \perp$ 平面 PAC，则 $BD \perp AP$. 过点 D 作 $DE \perp AP$ 于 E，连接 BE，则 $AP \perp$ 平面 BDE，所以 $BE \perp AP$. 则 $\angle BED$ 为二面角 $B-AP-C$ 的平面角.



因为 $AB = BC = 2$，所以 $BD = AD = \sqrt{2}$. 由题意可知 $\triangle PAC$ 是等腰直角三角形，$DE = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$. 所以在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中，$BE = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$，$\sin\angle BED = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以二面角 $B-AP-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4-1. ABD 【解析】对 A:由菱形 $ABCD$ 中 $AB=2,\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$,$E$ 为边 BC 的中点知 $\angle B=\frac{\pi}{3}$ 且 $BE=1$,易知 $AE\perp EC,AE\perp B_1E$,而 $EC\cap B_1E=E$,故 $AE\perp$ 平面 B_1EC,又 $AE\subset$ 面 AB_1E,所以平面 $AB_1E\perp$ 平面 B_1EC,正确.

对 B:如图,取 AB_1 的中点 G',连接 $G'E$,$G'F$,又 F 为 B_1D 的中点,则 $G'F//AD$ 且 $G'F=\frac{1}{2}AD$,而 $EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$ 且 $EC//AD$,所以 $G'F//EC$ 且 $G'F=EC$,即 $FG'EC$ 为平行四边形,故 $CF//EG'$,所以 AB_1 与 CF 的夹角为 $\angle AG'E$ 或其补角,取 AB 中点 G,连接 GE,即 $\angle AG'E=\angle AGE$,由 A 分析易知 $\angle AGE=\frac{2\pi}{3}$,故 AB_1 与 CF 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,正确.



对 C:由上述分析知翻折过程中,当 $B_1E\perp$ 平面 $ABCD$ 时,V_{B_1-AED} 最大,此时 $V_{B_1-AED}=\frac{1}{3}\cdot B_1E\cdot S_{\triangle AED}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2=\frac{\sqrt{3}}{3}$,错误.

对 D:由 B 分析知 $EG'=CF$ 且 $EG'//CF$,故 F 的轨迹与 G 到 G'的轨迹相同,由 A 知 B 到 B_1 的轨迹为以 E 为圆心,BE 为半径的半圆,而 G 为 AB 中点,故 G 到 G' 的轨迹为以 AE 中点为圆心,$\frac{B_1E}{2}$为半径的半圆,所以 F 的轨迹长度为$\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{B_1E}{2}=\frac{\pi}{2}$,正确.

故选 ABD.

5-1. 【解】(1)取 AD 的中点 M,连接 OM,PM,如图,

由正四棱锥的性质可知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,且 $AD\subset$ 平面 $ABCD$,则 $AD\perp PO$,

依题意可知 $AD\perp MO$,$PO\cap MO=O$,PO,$MO\subset$ 平面 POM,则 $AD\perp$ 平面 POM,又 $PM\subset$ 平面 POM,所以 $AD\perp PM$,则

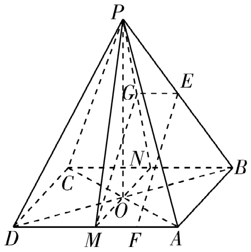
$\angle PMO$ 为所求二面角的平面角.

由 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,可知 $\angle PAO$ 为侧棱 PA 与底面 $ABCD$ 所成的角,

则 $\tan\angle PAO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,设 AB 的长度为 a,$a>0$,则 $AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以 $PO=AO\cdot\tan\angle PAO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

则 $\tan\angle PMO=\dfrac{PO}{MO}=\sqrt{3}$,因为 $0°<\angle PMO<90°$,故 $\angle PMO=60°$,即侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角的大小为 $60°$.



(2)延长 MO 交 BC 于点 N,则 N 为 BC 的中点,连接 PN,取 PN 的中点 G,连接 EG,MG.

因为 $PB=PC$,N 为 BC 的中点,

所以 $BC\perp PN$,

同理可得 $PM\perp AD$,

又 $AD/\!/BC$,所以 $BC\perp PM$,

又 $PM\cap PN=P$,PM,$PN\subset$ 平面 PMN,故 $BC\perp$ 平面 PMN.

由 $BC\subset$ 平面 PBC,可知平面 $PMN\perp$ 平面 PBC,

又因为 $PM=\sqrt{PA^2-AM^2}=\sqrt{PB^2-BN^2}=PN$,$\angle PMN=60°$,

所以 $\triangle PMN$ 为正三角形,且 G 为 PN 的中点,则 $MG\perp PN$,

又因为平面 $PMN\perp$ 平面 PBC,平面 $PMN\cap$ 平面 $PBC=PN$,$MG\subset$ 平面 PMN,

所以 $MG\perp$ 平面 PBC.

取 AM 的中点 F,连接 EF,

因为 G,E 分别为 PN,PB 的中点,所以 $EG/\!/BN$ 且 $EG=\dfrac{1}{2}BN$,

因为 $AD/\!/BC$ 且 $AD=BC$,M,N 分别为 AD,BC 的中点,

所以 $AM/\!/BN$ 且 $AM=BN$,

又 F 为 AM 的中点,

则 $FM /\!/ BN$ 且 $FM=\frac{1}{2}BN$，

所以 $FM /\!/ EG$ 且 $FM=EG$，

可得四边形 $EFMG$ 为平行四边形，则 $EF /\!/ MG$，故 $EF\perp$平面 PBC，

因此存在点 F，使 $EF\perp$侧面 PBC，此时 F 是 AD 上靠近点 A 的四等分点.

4.5 几种简单几何体的表面积和体积

4.5.1 几种简单几何体的表面积

· 题型诀 ·

1–1. C 【解析】因为底面 $ABCD$ 的直观图是边长为 1 的正方形，所以底面 $ABCD$ 是两邻边分别为 1 与 3，高为 $2\sqrt{2}$ 的平行四边形，其周长是 $1+3+1+3=8$，面积是 $1\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

所以直四棱柱的表面积是 $8\times2+2\sqrt{2}\times2=16+4\sqrt{2}$. 故选 C.

1–2. $48\sqrt{3}+24$ 【解析】$S_{底}=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=24\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$，$S_{侧}=4\times1\times6=24(\mathrm{cm}^2)$，$S_{表}=2S_{底}+S_{侧}=(48\sqrt{3}+24)\ \mathrm{cm}^2$.

2–1. C 【解析】由题意可知三棱锥是正四面体，各个三角形的边长均为 a，三棱锥的表面积就是 4 个全等三角形的面积之和，即 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}a^2$，故选 C.

2–2. B 【解析】由题得侧面三角形的斜高为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，所以该正四棱锥的表面积为 $2^2+4\times\frac{1}{2}\times2\times2=12$. 故选 B.

3–1. $\frac{11+3\sqrt{3}}{2}$ 【解析】因为 $CC_1\perp$平面 ABC，$AC, CB\subset$平面 ABC，

所以 $CC_1\perp AC$，$CC_1\perp CB$.

又 $\angle ACB=90°$，$AC=2$，$A_1C_1=1$，$CC_1=1$，

所以 $S_{梯形BB_1C_1C}=S_{梯形AA_1C_1C}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=\frac{3}{2}$.

在梯形 A_1ABB_1 中，易知，$A_1B_1=\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{2}$，$AA_1=BB_1=\sqrt{2}$，

所以 $S_{梯形A_1ABB_1}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以这个三棱台的侧面积 $S_{侧}=S_{梯形BB_1C_1C}+S_{梯形AA_1C_1C}+S_{梯形A_1ABB_1}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$, $S_{上底}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$, $S_{下底}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$, 所以三棱台表面积为$\frac{11+3\sqrt{3}}{2}$.

4-1. $4\pi S$ **【解析】**设底面圆半径为 r,母线为 l,由已知得 $S=\pi r^2$, $\therefore r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. 又 $l=2\pi r$,

$\therefore S_{侧}=2\pi rl=4\pi^2r^2=4\pi S$.

5-1. D **【解析】**设圆锥母线长为 l,底面圆的半径为 r,则$\frac{3\pi}{4}=\frac{2\pi r}{l}$,所以 $l=\frac{8}{3}r$,

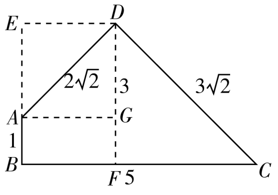
圆锥表面积 $A=\pi r^2+\pi rl=\frac{11}{3}\pi r^2$,扇形面积 $B=\pi rl=\frac{8}{3}\pi r^2$,

所以 $A:B=11:8$. 故选 D.

6-1. 107π **【解析】**由题知上底面半径 $r'=2$,下底面半径 $r=7$,母线长 $l=6$,由圆台表面积公式知圆台的表面积

$$\begin{aligned}S&=S_{侧}+S_{上底}+S_{下底}\\&=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)\\&=\pi(2^2+7^2+2\times6+7\times6)\\&=107\pi.\end{aligned}$$

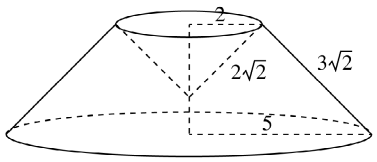
6-2. $25\pi+25\sqrt{2}\pi$ **【解析】**将平面图形补全为如图所示的直角梯形 $EDBC$.



过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F,过点 A 作 $AG\perp DF$ 于点 G,由 $\angle BCD=\frac{\pi}{4}$得 $\angle ADF=\frac{\pi}{4}$,又 $AD=2\sqrt{2}$,则 $AG=DG=BF=ED=2$. 因为 $BC=5$,所以 $FC=DF=3$,故 $CD=3\sqrt{2}$, $AB=1$.

四边形 $ABCD$ 绕 AB 旋转一周所成几何

体为一个圆台挖去一个圆锥剩下的部分,如图所示.



该几何体的表面积为 $\pi\times2\times2\sqrt{2}+\pi\times3\sqrt{2}\times(2+5)+\pi\times5^2=25\pi+25\sqrt{2}\pi$.

7-1. B 【解析】设两球的半径分别为 r_1,r_2,表面积分别为 S_1,S_2,

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{4}{9}$.

8-1. A 【解析】由题意,正四棱锥 $P-EFGH$ 的斜高为 $\sqrt{3+1}=2$,该组合体的表面积为 $2\times2+4\times2\times1+4\times\frac{1}{2}\times2\times2=20$.

故选 A.

4.5.2　几种简单几何体的体积

· 易错记 ·

1-1.【解】由题意得,阴影部分旋转 180°形成的几何体是一个圆锥从下面挖去一个圆柱所剩余的部分. 因为圆锥的底面半径为 2、母线长为 4、高为 $2\sqrt{3}$,圆柱的底面半径为 1、母线长为 $\sqrt{3}$,所以圆锥的表面积 $S_1=\pi\times2^2+\pi\times2\times4=12\pi$,圆柱的侧面积 $S_2=2\pi\times1\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$,圆锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$,圆柱的体积 $V_2=\pi\times1^2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$,则所求几何体的表面积 $S=S_1+S_2=12\pi+2\sqrt{3}\pi$,体积 $V=V_1-V_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$.

· 题型诀 ·

1-1. C 【解析】因为甲、乙两个圆柱的底面面积分别为 S_1,S_2,且 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{16}{9}$,

所以甲、乙两个圆柱的底面半径 R_1,R_2 满足 $\frac{R_1}{R_2}=\frac{4}{3}$,

所以甲、乙两个圆柱的底面周长 C_1,C_2 满足 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{4}{3}$.

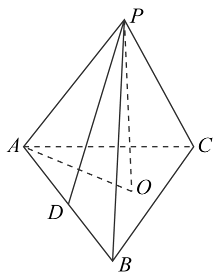
又因为甲、乙两个圆柱的侧面积相等,所

以甲、乙两个圆柱的高 H_1，H_2 满足$\frac{H_1}{H_2}=\frac{3}{4}$，所以甲、乙两个圆柱的体积 V_1，V_2 满足$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_1H_1}{S_2H_2}=\frac{16}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$.

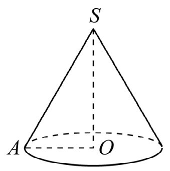
故选 C.

1–2. 2 【**解析**】$\because$ 正六棱柱底面为边长为 m 的正六边形，$\therefore$ 底面面积为$(m+2m)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m=\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2$. $\therefore$ 正六棱柱体积 $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2\cdot m=12\sqrt{3}$，解得 $m=2$.

2–1. AB 【**解析**】如图，取$\triangle ABC$ 的中心为 O，连接 PO，由题意得 $PO\perp$ 平面 ABC. 又$\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $AO=\frac{2}{3}\times\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，所以正三棱锥的高 $PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{12-3}=3$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin60°=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，所以正三棱锥的体积 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 过点 P 向 AB 作垂线，垂足为 D. 又 $PA=PB=2\sqrt{3}$，$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，则正三棱锥的斜高 $PD=\sqrt{PA^2-AD^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$，所以正三棱锥的侧面积 $S_{侧}=3\times\frac{1}{2}\cdot PD\cdot AB=3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{39}}{2}\times3=\frac{9\sqrt{39}}{4}$. 故选 AB.



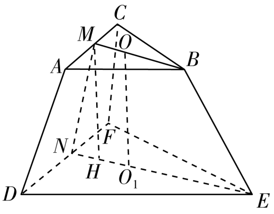
2–2. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ 【**解析**】如图所示，$\because$ 圆锥的母线与其底面所成角的大小为 60°，



$\therefore\angle SAO=60°$，由题意设圆锥的底面半

径为 r，则母线长为 $l=2r$，高为 $h=\sqrt{3}r$. $\because$ 圆锥的侧面积为 8π，$\therefore S_{侧面积}=\pi rl=\pi\cdot r\cdot 2r=2\pi r^2=8\pi$，解得 $r=2,h=2\sqrt{3}$，$\therefore$ 圆锥的体积 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\times 2^2\times 2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$.

3-1. $\frac{7\sqrt{26}}{3}$　【解析】取 AC 中点为 M，DF 中点为 N，连接 MN,MB,NE.



设$\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 的中心分别为点 O，点 O_1，连接 OO_1，

过点 M 作 $MH\perp NE$ 交 NE 于 H，

则 OO_1 为正三棱台 $ABC-DEF$ 的高，且四边形 OO_1HM 为矩形.

因为 $OM=\frac{1}{3}BM=\frac{1}{3}\times\sqrt{2^2-1^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

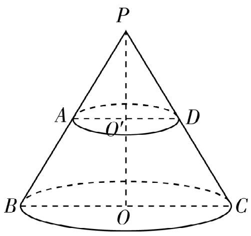
$O_1N=\frac{1}{3}NE=\frac{1}{3}\times\sqrt{4^2-2^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $NH=O_1N-O_1H=O_1N-OM=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又 $NM=3$，故 $OO_1=MH=\sqrt{NM^2-NH^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{78}}{3}$，

且 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，

故三棱台 $ABC-DEF$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times(\sqrt{3}+4\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}})\times\frac{\sqrt{78}}{3}=\frac{7\sqrt{26}}{3}$.

3-2.【解】如图，将圆台看作一个大圆锥上面截掉一个小圆锥得到的几何体，设 O',O 分别为圆台上、下底面的圆心，连接 PO，则 $O'D=1,OC=2,O'O=1$.



易得$\triangle PO'D \backsim \triangle POC$，则$\frac{PO'}{PO}=\frac{PO-O'O}{PO}=\frac{O'D}{OC}=\frac{1}{2}$，得 $PO=2$，即 $PO'=1$，$PD=\sqrt{2}$，$PC=2\sqrt{2}$，则 $DC=\sqrt{2}$.

(1)圆台的表面积 $S=\pi\cdot O'D^2+\pi\cdot OC^2+\pi\cdot O'D\cdot DC+\pi\cdot OC\cdot DC=\pi+4\pi+\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}\pi=(5+3\sqrt{2})\pi$.

(2)圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot PO\cdot\pi\cdot OC^2-\frac{1}{3}\cdot PO'\cdot\pi\cdot O'D^2=\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$.

4-1. AC 【解析】设球的半径为 r，则 $4\pi r^2=16\pi$，$r=2$，

所以球的体积为$\frac{4\pi}{3}\cdot r^3=\frac{32\pi}{3}$，

所以 A，C 选项正确. 故选 AC.

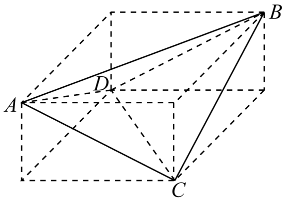
4-2. A 【解析】设球 O 的半径为 R，则 $R^2-\frac{R^2}{4}=(\sqrt{3})^2$，解得 $R=2$，所以球 O 的体积 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{32}{3}\pi$. 故选 A.

5-1. A 【解析】设圆锥的底面半径为 r cm，高为 h cm，母线长为 R cm.

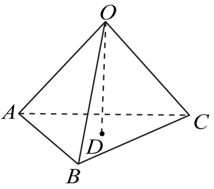
根据题意，可得$\begin{cases}\frac{\pi R^2}{2}=\frac{9\pi}{2},\\ 2\pi r=\pi R,\end{cases}$ 则$\begin{cases}R=3,\\ r=\frac{3}{2},\end{cases}$ 所以$h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

故该冰激凌的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{18+9\sqrt{3}}{8}\pi(\text{cm}^3)$. 故选 A.

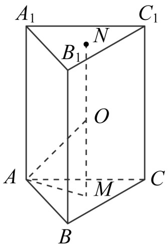
6-1. $\frac{32}{3}$ 【解析】如图，因为 $AD=AC=BC=BD$，$AB=CD=4\sqrt{2}$，所以该长方体的长和宽都是 4，设该长方体的高为 h，球 O 的半径为 R，则 $R=\frac{\sqrt{16+16+h^2}}{2}$. 因为过点 A 作球 O 的截面，最大的截面面积为 9π，所以 $R=3$，则 $h=2$，故四面体 $ABCD$ 的体积是 $4\times4\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4\times2\times4=\frac{32}{3}$.



7-1. A 【解析】由于三棱锥 $S-ABC$ 与三棱锥 $O-ABC$ 的底面都是$\triangle ABC$,O 是 SC 的中点,因此三棱锥 $S-ABC$ 的高是三棱锥 $O-ABC$ 高的 2 倍,所以三棱锥 $S-ABC$ 的体积也是三棱锥 $O-ABC$ 体积的 2 倍. 在三棱锥 $O-ABC$ 中,其棱长都是 1,设 D 为$\triangle ABC$ 的中心,连接 OD,如图所示,$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot AB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $OD=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $V_{S-ABC}=2V_{O-ABC}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

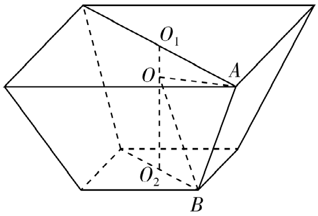


7-2. B 【解析】如图所示,取 $\triangle ABC$,$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆的圆心分别为 M,N,连接 MN,取 MN 的中点 O,则 O 是三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的球心,连接 OA,AM. 设$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为 R,由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2r$,解得 $r=2$,即 $AM=2$. 又 $BB_1=2\sqrt{5}$,所以 $OM=\sqrt{5}$,所以 $R=OA=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$,所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times3^2=36\pi$. 故选 B.



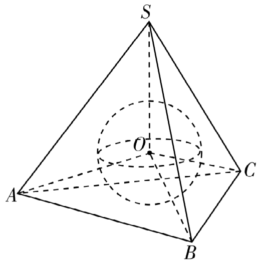
7-3. 40π 【解析】米斗的示意图如图所示,设米斗两底面中心分别为 O_1,O_2,由棱台的性质可知,外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上. 连接 OA,OB,由题意 $O_1A=2\sqrt{2}$, $O_2B=\sqrt{2}$, $AB=2\sqrt{5}$,所以 $O_1O_2=\sqrt{AB^2-(O_1A-O_2B)^2}=\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$. 设外

接球的半径为 R，$OO_2=h$，则 $OO_1=|3\sqrt{2}-h|$. 因为 O_1O_2 垂直于上、下底面，所以 $OO_2^2+O_2B^2=R^2$，即 $h^2+(\sqrt{2})^2=R^2$，又 $OO_1^2+O_1A^2=R^2$，即 $(3\sqrt{2}-h)^2+(2\sqrt{2})^2=R^2$，联立解得 $h=2\sqrt{2}$，$R^2=8+2=10$，所以该米斗的外接球的表面积为 $4\pi R^2=40\pi$.



8-1. D 【解析】由题意，设球的半径为 r，作出玻璃杯的轴截面（图略），可得一个半径为 r 的圆内切于一个边长为 4 的等边三角形，此等边三角形的高 $h=2\sqrt{3}$. 根据中心（重心）的性质可得，球的半径 $r=\frac{1}{3}h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$. 即溢出溶液的体积为 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$，故选 D.

8-2. $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ 【解析】作出棱长为 a 的正四面体 $S-ABC$ 及其内切球 O，如图，连接 OA,OB,OC,OS. 设正四面体 $S-ABC$ 的内切球 O 的半径为 r，正四面体 $S-ABC$ 的高为 h.



$\because V_{S-ABC}=4V_{O-ABC}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

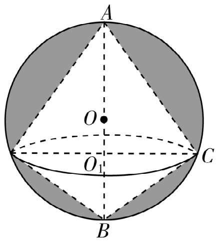
$\therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=4\times\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r$，

$\therefore r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$.

9-1. C 【解析】由题意可知旋转后的几

何体是一个圆柱挖掉两个完全相同的圆锥，其中圆柱和圆锥的底面半径均为 1，圆柱的高为 4，圆锥的高为 1，则所求几何体的体积为 $\pi\times1^2\times4-2\times\frac{1}{3}\times1^2\times\pi\times1=4\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$. 故选 C.

9-2.【解】过点 C 作 $CO_1\perp AB$，垂足为点 O_1，如图所示.



因为 $\angle BCA=90°$，$\angle BAC=30°$，$AB=4$，

所以 $AC=2\sqrt{3}$，$BC=2$，$CO_1=\sqrt{3}$.

旋转一周后得到的几何体为球内部挖去两个圆锥后剩下的部分，

因为 $S_{球}=4\pi R^2=16\pi$，$S_{圆锥AO_1侧}=\pi\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6\pi$，

$S_{圆锥BO_1侧}=\pi\times\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}\pi$，

所以 $S_{几何体}=S_{球}+S_{圆锥AO_1侧}+S_{圆锥BO_1侧}=(22+2\sqrt{3})\pi$.

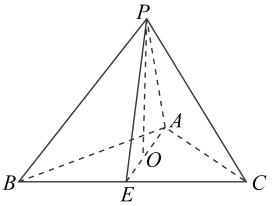
又 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$，

$V_{圆锥AO_1}=\frac{1}{3}AO_1\cdot\pi\cdot CO_1^2=\pi\cdot AO_1$，

$V_{圆锥BO_1}=\frac{1}{3}BO_1\cdot\pi\cdot CO_1^2=\pi\cdot BO_1$，

所以 $V_{几何体}=V_{球}-(V_{圆锥AO_1}+V_{圆锥BO_1})=\frac{32}{3}\pi-4\pi=\frac{20}{3}\pi$.

10-1. $9\sqrt{3}$　$\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$　【解析】由题意，作出三棱锥 $P-ABC$ 如图所示.



取 BC 的中点 E，连接 AE，PE，

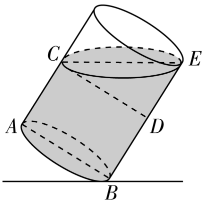
由等边三角形的性质可得△ABC 的中心 O 在线段 AE 上，且 $OE=\frac{1}{3}AE=\frac{\sqrt{3}}{3}CE=1$.

连接 PO,则 PO 为该三棱锥的高,即 $PO=\sqrt{3}$,所以 $PE=\sqrt{OE^2+PO^2}=2$. 又 $PB=PC$,所以 $PE\perp BC$,所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot PE=2\sqrt{3}$. 又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=3\sqrt{3}$,所以三棱锥的表面积 $S=S_{\triangle ABC}+3S_{\triangle PBC}=3\sqrt{3}+3\times2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$,该三棱锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$,当球与三棱锥 $P-ABC$ 内切时,体积最大,设三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的半径为 R,则 $V_1=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+3S_{\triangle PBC})\cdot R=\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\cdot R=3$,解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $V_{max}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$.

10-2.【解】点 C,E 的位置如图所示,连接 CE,AB,过点 C 作 $CD//AB$ 交 BE 于点 D.

在 Rt$\triangle CDE$ 中,$DE=20\tan\alpha$,$\pi\times10^2\times(30-20\tan\alpha)+\frac{\pi\times10^2\times20\tan\alpha}{2}=\pi\times10^2\times20$,

解得 $\tan\alpha=1$,即 α 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.



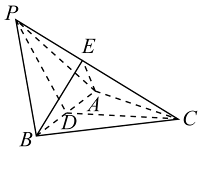
11-1. (1)【证明】因为 $\triangle PAB$ 是等边三角形,所以 $PB=PA$.

又 $\angle PAC=\angle PBC=90°$,$PC=PC$,

所以 Rt$\triangle PBC\cong$Rt$\triangle PAC$,

所以 $AC=BC$.

如图,取 AB 的中点 D,连接 PD,CD,



则 $PD\perp AB$,$CD\perp AB$.

又 $PD\cap CD=D$,$PD,CD\subset$平面 PDC,所以 $AB\perp$平面 PDC.

又因为 $PC\subset$平面 PDC,所以 $AB\perp PC$.

(2)【解】如图，过点 B 作 $BE\perp PC$，垂足为 E，连接 AE.

因为 $Rt\triangle PBC\cong Rt\triangle PAC$，

所以 $AE\perp PC$，$AE=BE$.

由已知得平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，且平面 $PAC\cap$ 平面 $PBC=PC$，$AE\subset$ 平面 PAC，所以 $AE\perp$ 平面 PBC. 又因为 $BE\subset$ 平面 PBC，所以 $AE\perp BE$，故 $\angle AEB=90°$.

因为 $\angle AEB=90°$，$\angle PEB=90°$，$AE=BE$，$AB=PB$，所以 $Rt\triangle AEB\cong Rt\triangle BEP$，

所以 $\triangle AEB$，$\triangle BEP$，$\triangle CEB$ 都是等腰直角三角形.

由 $PC=4$，得 $AE=BE=2$，$\triangle AEB$ 的面积 $S=2$.

因为 $PC\perp BE$，$PC\perp AE$，$AE\cap BE=E$，

所以 $PC\perp$ 平面 AEB，

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot PC=\frac{1}{3}\times2\times4=\frac{8}{3}$.

11-2.【解】(1) 存在实数 λ 满足 $PF=2FC$，即 $\lambda=2$ 使得 $BF//$平面 PDE.

证明如下：取 DC 上一点 G，满足 $DG=2GC$，连接 GF，GB，BF.

因为 $PF=2FC$，所以 $GF//PD$.

因为 $GF\not\subset$ 平面 PDE，$PD\subset$ 平面 PDE，所以 $GF//$平面 PDE.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，且 $2AE=EB$，

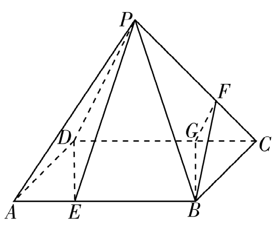
所以 $DG\underline{\parallel}BE$，

所以四边形 $EBGD$ 为平行四边形，所以 $BG//ED$，

因为 $BG\not\subset$ 平面 PDE，$ED\subset$ 平面 PDE，所以 $BG//$平面 PDE.

又因为 $BG\cap GF=G$，且 $BG\subset$ 平面 BGF，$GF\subset$ 平面 BGF，所以平面 $BGF//$ 平面 PDE.

又因为 $BF\subset$ 平面 BGF，所以 $BF//$ 平面 PDE.



(2)已知 $V_{P-DEF}=V_{F-PDE}$,

因为 $BF//$平面 PDE,

所以 $V_{F-PDE}=V_{B-PDE}$.

又因为正四棱锥的高为 1,底面边长为 2,

所以 $V_{B-PDE}=V_{P-BDE}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times2=\frac{4}{9}$.